

# Correction TD1 : Approximation de fonctions

## 1 Méthode des moindres carrés

**Exercice 2 (régression linéaire pondérée).** Soit le modèle de régression linéaire

$$f(x, a, b) = ax + b$$

Lorsque on veut estimer les paramètres adéquats pour ce modèle en fonction des données ( $n$  points  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) et de leurs incertitudes, on cherche les paramètres  $a$  et  $b$  minimisant

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b)^2$$

avec  $\sigma_i$  l'écart-type de l'erreur commise sur la mesure de  $y_i$ . On a  $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}}$ . Notons les moyennes pondérées  $\bar{x}^p$  et  $\bar{y}^p$  définies de la manière suivante :

$$\bar{x}^p = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \bar{y}^p = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

1. Montrer qu'au minimum de  $\chi^2$ ,  $b$  vaut

$$b = \bar{y}^p - a\bar{x}^p$$

On cherche le minimum de la fonction  $\chi^2$ . Pour cela, il faut chercher où le gradient de  $\chi^2$  vaut 0. On doit donc calculer les dérivées partielles de  $\chi^2$  par rapport à  $a$  et  $b$ . Celles-ci valent

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - ax_i - b) \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b) \end{cases}$$

Le minimum de  $\chi^2$  est donc atteint pour  $(a, b)$  solution de

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - ax_i - b) = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$$

La seconde ligne du système à résoudre donne

$$\sum_{i=1}^n w_i (y_i - ax_i - b) = 0 \iff \sum_{i=1}^n w_i y_i - a \sum_{i=1}^n w_i x_i - b \sum_{i=1}^n w_i = 0$$

D'où

$$b = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \left( \sum_{i=1}^n w_i y_i - a \sum_{i=1}^n w_i x_i \right) = \bar{y}^p - a\bar{x}^p$$

2. Montrer qu'au minimum de  $\chi^2$ ,  $a$  vaut

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2}$$

Si on réécrit le système à résoudre, on a

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - a x_i - b) = \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n w_i (y_i - a x_i - b) = \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = 0 \end{cases}$$

Si on multiplie la deuxième ligne par  $\bar{x}^p$  et qu'on la soustrait à la première ligne, on obtient

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) - \bar{x}^p \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = 0 - \bar{x}^p \times 0 = 0$$

Or

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n w_i x_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) - \bar{x}^p \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) = \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p - a(x_i - \bar{x}^p)) \\ &= \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p) - a \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2 \end{aligned}$$

Et finalement, on obtient

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2}$$

3. Supposons que les écart-types des erreurs commises sur  $y_i$  soient égaux. Que valent  $a$  et  $b$  ?

Supposons maintenant que les écart-types des erreurs commises sur  $y_i$  soient égaux. Cela veut dire que les  $w_i$  ont tous la même valeur, notons cette valeur  $w$ . Les moyennes pondérées valent

$$\bar{x}^p = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w \sum_{i=1}^n x_i}{w \sum_{i=1}^n 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad \bar{y}^p = \frac{\sum_{i=1}^n w_i y_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{w \sum_{i=1}^n y_i}{w \sum_{i=1}^n 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}$$

On remarque que  $\bar{x}^p$  et  $\bar{y}^p$  sont égales aux moyennes usuelles  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ . Pour  $a$  et  $b$ , on a

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x}^p)^2} = \frac{w \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^p) (y_i - \bar{y}^p)}{w \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}^p)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

$$b = \bar{y}^p - a \bar{x}^p = \bar{y} - a \bar{x}$$

On retrouve  $a$  et  $b$ , les deux coefficients de la régression linéaire.

## 2 Interpolation

**Exercice 3.** La mesure de la tension aux bornes d'un dipôle a donné les valeurs suivantes

$t$ [s]	0	3	4
$U$ [V]	-8	4	0

On suppose que cette tension varie suffisamment lentement pour qu'on puisse l'approximer par un polynôme de degré faible. Estimez à partir de ces données l'instant  $\hat{t}$  où la tension devrait atteindre son maximum, ainsi que la tension  $\hat{U}$  en ce maximum.

On suppose que la tension varie suffisamment lentement pour qu'on puisse l'approximer par un polynôme de degré faible. On va donc interpoler la tension aux points  $(0, -8)$ ,  $(3, 4)$  et  $(4, 0)$ . Pour cela, on va construire la forme lagrangienne du polynôme d'interpolation noté  $L$ . On rappelle que ce polynôme est une combinaison linéaire  $L(x) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x)$  de polynômes de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Dans notre cas  $n$  vaut 2, l'indice  $j$  varie donc de 0 à 2 et

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 3}{0 - 3} \frac{x - 4}{0 - 4} = \frac{1}{12}(x - 3)(x - 4)$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{3 - 0} \frac{x - 4}{3 - 4} = -\frac{1}{3}x(x - 4)$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{4 - 0} \frac{x - 3}{4 - 3} = \frac{1}{4}x(x - 3)$$

et le polynôme d'interpolation vaut

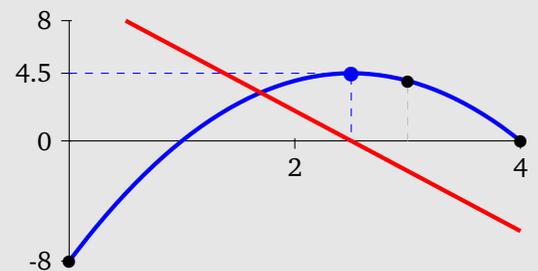
$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{j=0}^2 y_j \ell_j(x) = -8\ell_0(x) + 4\ell_1(x) + 0\ell_2(x) = -\frac{8}{12}(x - 3)(x - 4) - \frac{4}{3}x(x - 4) \\ &= (x - 4) \left( -\frac{2}{3}(x - 3) - \frac{4}{3}x \right) = (x - 4)(-2x + 2) = -2x^2 + 10x - 8 \end{aligned}$$

et sa dérivée

$$L'(x) = -4x + 10$$

d'où le tableau des variations suivant.

$x$	0	2.5	3	4
$L'(x)$		+	0	-
$L(x)$	-8	$\hat{U} = 4.5$	4	0



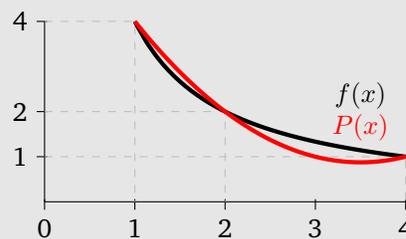
La tension maximale est donc atteinte en  $\hat{t} = 2.5$  et elle vaut  $\hat{U} = 4.5$ .

**Exercice 4.** Le polynôme  $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 7$  interpole la fonction  $f(x) = \frac{4}{x}$  aux points d'abscisses 1, 2, 4.

1. Vérifier que  $P$  interpole bien  $f$  aux points d'abscisses 1, 2, 4.

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 & P(1) &= \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 7 = 7 - 3 = 4 \\ f(2) &= \frac{4}{2} = 2 & P(2) &= \frac{1}{2} \times 2^2 - \frac{7}{2} \times 2 + 7 = 2 - 7 + 7 = 2 \\ f(4) &= \frac{4}{4} = 1 & P(4) &= \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{7}{2} \times 4 + 7 = 8 - 14 + 7 = 1 \end{aligned}$$

Le polynôme  $P(x)$  interpole bien  $f$  aux points d'abscisses 1, 2 et 4.



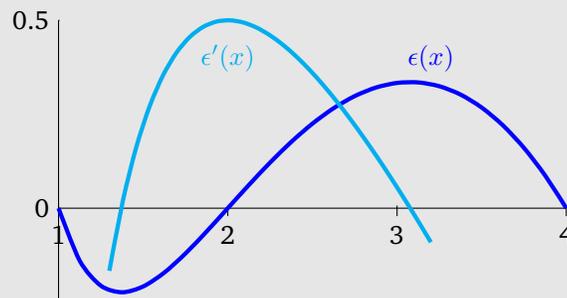
2. Calculer l'erreur  $\epsilon(x) = f(x) - P(x)$ .

L'erreur vaut  $\epsilon(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 7 = \frac{1}{2x}(8 - x^3 + 7x^2 - 14x) = \frac{1}{2x}(1-x)(2-x)(4-x)$ .

3. Quand cette erreur prend-elle sa valeur maximale pour  $x$  dans  $[1, 4]$  ?

Pour savoir où l'erreur prend sa valeur maximale sur  $[1, 4]$ , on calcule sa dérivée. On a  $\epsilon'(x) = -\frac{4}{x^2} - x + \frac{7}{2}$ . Il nous faut déterminer le signe de  $\epsilon'$  pour connaître les variations de  $\epsilon$ . On va donc calculer la dérivée seconde  $\epsilon''(x) = \frac{8}{x^3} - 1$  et on a le tableau des variations suivant pour  $\epsilon'$

$x$	1	$x_1$	2	$x_2$	4
$\epsilon''(x)$		+	0	-	
$\epsilon'(x)$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$



D'après le **théorème des valeurs intermédiaires** (cf. cours résolution d'équations non-linéaires), il existe  $x_1 \in ]1, 2[$  et  $x_2 \in ]2, 4[$  tel que

$$\epsilon'(x_1) = \epsilon'(x_2) = 0$$

Numériquement, on trouve que  $x_1 \approx 1.37$  et  $x_2 \approx 3.07$ . On a maintenant le tableau des variations pour  $\epsilon$

$x$	1	$x_1$	2	$x_2$	4	
$\epsilon'(x)$		-	0	+	0	-
$\epsilon(x)$	0		$\epsilon(x_1) \approx -0.2237$		$\epsilon(x_2) \approx 0.3354$	0

L'erreur prend sa valeur maximale en  $x_2$ , elle vaut environ 0.3354.

4. Que faire pour réduire cette erreur ?

Une idée pour diminuer l'erreur serait d'ajouter un point d'interpolation (par exemple,  $(x_2, f(x_2))$ ). Cependant, il est possible qu'ajouter ce point d'interpolation fasse empirer les choses (phénomène de Runge par exemple).

### 3 Extrait de l'examen de 2012

#### 3.1 Interpolation polynômiale (4 points)

On veut calculer les valeurs d'une fonction  $f(x)$  pour toutes les valeurs de  $x$ , mais on ne connaît pas  $f$  explicitement. Ceci se produit typiquement lorsque  $f$  n'est connue qu'en certains points expérimentaux. On considère la fonction  $f$  dont 3 points du graphique sont connus ( $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 3$  et  $f(2) = 7$ ). On propose de chercher  $f$  dans la famille des polynômes.

1. Quel est le degré  $n$  du polynôme d'interpolation  $P$  tel que le problème admette une solution unique ?

On cherche à interpoler une fonction  $f$  en trois points en utilisant l'interpolation polynômiale. Notons  $P$  le polynôme interpolant  $f$  en ces trois points. On note que les points d'interpolation ont des abscisses différentes. Ainsi, pour que le polynôme d'interpolation  $P$  soit unique, il faut que son degré soit de  $n = 2$  (nombre de points d'interpolation - 1).

2. Écrire le système d'équations qui détermine les coefficients (a,b,c) de ce polynôme ( $P(x) = a + bx + cx^2$ ) et le résoudre.

On veut que  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 3$  et  $P(2) = 7$  (car  $P$  interpole  $f$  en ces points). On a donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} a & = & 1 \\ a + b + c & = & 3 \\ a + 2b + 4c & = & 7 \end{cases}$$

On a immédiatement que  $a = 1$  et on réinjecte la valeur de  $a$  dans les deuxième et troisième lignes. On a ainsi le système suivant pour trouver  $b$  et  $c$

$$\begin{cases} b + c & = & 2 \\ 2b + 4c & = & 6 \end{cases}$$

Si on multiplie la première ligne par 2 et qu'on la soustrait à la seconde ligne, on a

$$2b + 4c - 2 \times (b + c) = 2c = 6 - 2 \times 2 = 4$$

d'où  $c = 1$  et comme  $b + c = 2$ , on en déduit que  $b = 1$ . Le polynôme

$$P(x) = 1 + x + x^2$$

interpole donc  $f$  aux points  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 3$  et  $f(2) = 7$ .

3. Écrire directement la solution grâce à la forme de Lagrange.

On recherche maintenant  $P$  en utilisant la forme de Lagrange. On rappelle ici que  $P(x) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x)$  avec les polynômes de Lagrange

$$\ell_j(x) = \prod_{k=0, k \neq j}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_j - x_n}$$

Dans notre cas  $n$  vaut 2, l'indice  $j$  varie donc de 0 à 2 et

$$\ell_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 1}{0 - 1} \frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$$

$$\ell_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 0}{1 - 0} \frac{x - 2}{1 - 2} = -x(x - 2)$$

$$\ell_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 0}{2 - 0} \frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}x(x - 1)$$

et le polynôme d'interpolation vaut

$$P(x) = \sum_{j=0}^2 y_j \ell_j(x) = \ell_0(x) + 3\ell_1(x) + 7\ell_2(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2) - 3x(x - 2) + \frac{7}{2}x(x - 1) = x^2 + x + 1$$

On retrouve bien le même polynôme d'interpolation qu'à la question précédente.

### 3.2 Approximation au sens des moindres carrés (4 points)

On considère toujours la fonction  $f$  connue expérimentalement en trois points. Cependant, on considère que les mesures sont entachées d'erreurs ( $f(0) \approx 1$ ,  $f(1) \approx 3$  et  $f(2) \approx 7$ ) et on cherche une fonction  $f$  de la forme  $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$ .

1. A priori, peut-on trouver une fonction de la forme  $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$  qui passe exactement par les trois points expérimentaux ?

On cherche 2 inconnues  $a$  et  $b$ . Pour que la forme  $f$  passe par les trois points expérimentaux, il faut que  $a$  et  $b$  suivent trois équations. Or il n'y a en général pas de solution pour un système de 3 équations à 2 inconnues. Il est donc vraisemblable qu'il n'existe pas une fonction de la forme  $f(x) = a\sqrt{|x-1|} + bx^2$  passant exactement par les trois points expérimentaux.

2. Écrire le problème de minimisation qui détermine les coefficients  $a$  et  $b$  au sens des moindres carrés.

La fonction modèle est de la forme

$$f(x, \beta) = \sum_{k=1}^m \beta_k \phi_k(x)$$

Ici,  $\beta_1 = a$ ,  $\phi_1(x) = \sqrt{|x-1|}$  et  $\beta_2 = b$ ,  $\phi_2(x) = x^2$ . On a donc affaire à un problème des moindres carrés linéaires. On cherche ainsi  $a$  et  $b$  tel que la quantité suivante  $S(a, b)$  soit minimale

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^3 (y_i - a\sqrt{|x_i-1|} - bx_i^2)^2 = (1-a)^2 + (3-b)^2 + (7-a-4b)^2$$

3. Déterminer le système d'équations linéaires à résoudre. Résoudre le système.

Le minimum de  $S$  est atteint lorsque les dérivées partielles de  $S$  en  $a$  et  $b$  s'annulent or

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = -2(1-a) - 2(7-a-4b) = 4a + 8b - 16 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2(3-b) - 2 \times 4(7-a-4b) = 8a + 34b - 62 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 4a + 8b = 16 \\ 8a + 34b = 62 \end{cases}$$

Maintenant si on multiplie la première ligne par 2 et qu'on la soustraie à la seconde ligne, on a

$$-2 \times (4a + 8b) + (8a + 34b) = 18b = -2 \times 16 + 62 = 30$$

et on obtient que  $b = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$ . Si on remplace la valeur de  $b$  nouvellement obtenue dans la première équation, on a  $a = 4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$ . La fonction  $f$  donc vaut

$$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{|x-1|} + \frac{5}{3}x^2.$$

On vérifie d'ailleurs qu'elle ne passe pas exactement par les points donnés.