TD3 : Systèmes linéaires et équations différentielles

1 Résolution de systèmes linéaires

Exercice 1 (Décompositions). Voici 2 matrices décomposées de la manière suivante (on ne demande pas de vérifier l'égalité)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -9 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -8 & 21 & 3 \\ 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 21 & 3 \\ 0 & \frac{15}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{10} \end{bmatrix}$$

1. Sous quelles formes sont décomposées les matrices ? Justifier.
2. Quel est le rang de chaque matrice ? Justifier.
3. Résoudre les systèmes suivants en utilisant les questions précédentes :

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}^\top$$
$$\mathbf{Bx} = \begin{bmatrix} 8 & 20 & -8 \end{bmatrix}^\top$$

Exercice 2 (Factorisation LU d'une matrice tridiagonale). Une matrice tridiagonale est une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{bmatrix}$$

1. Soit $\mathbf{A}$ la matrice tridiagonale $n \times n$ suivante ($a_i = 2, b_j = c_k = -1$) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   On cherche une factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ de $\mathbf{A}$, où $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ sont des matrices bidiagonales de la forme :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \beta_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

Montrer que cette factorisation existe et que les coefficients α_i et β_i s'obtiennent avec les relations suivantes :

$$\alpha_1 = 2, \quad \beta_i = \frac{-1}{\alpha_{i-1}}, \quad \alpha_i = 2 + \beta_i, \quad \forall i = 2, \cdots, n$$

2. Soit $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^\top$. Montrer que la solution $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ du système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$ se calcule par des formules de récurrence, en deux temps :
   (i) Calcul d'un vecteur $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ vérifiant :
   $$y_1 = f_1, \quad y_i = f_i - \beta_i y_{i-1}, \quad \forall i = 2, \ldots, n$$
   (ii) Calcul de la solution $\mathbf{x}$ par :
   $$x_n = \frac{y_n}{\alpha_n}, \quad x_i = \frac{y_i + x_{i+1}}{\alpha_i}, \quad \forall i = n-1, \ldots, 1$$
3. Préciser les matrices $\mathbf{L}$ et $\mathbf{U}$ dans le cas $n = 3$.

2 Résolution d'équations différentielles

Exercice 3. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. On considère le problème suivant :
Trouver $u \in \mathcal{C}^2([0, 1])$ tel que :

$$\begin{cases} -u''(x) &= f(x) \qquad x \in]0, 1[\\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Dans cette question on pose $f(x) = 1$, $\forall x \in [0, 1]$. Calculer la solution $u(x)$ du problème (1).
2. On suppose que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, 1]$. Montrer, en utilisant la formule de Taylor, que $u''(x)$ peut s'écrire en tout point $x \in]0, 1[$:
   $$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + h^2 \varepsilon(x), \qquad \forall h \neq 0 \text{ tel que } x + h,\ x - h \in]0, 1[$$
   où la fonction ε est bornée sur $[0, 1]$.
3. On revient au cas général. On subdivise de façon régulière l'intervalle $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h = \frac{1}{n}$. On pose $x_i = ih$, et $f_i = f(x_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$. Les inconnues sont désormais $u_i = u(x_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$. (i) Montrer que l'on a l'approximation :
   $$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$
   (ii) Montrer que le problème (1) écrit aux noeuds x_i :
   $$\begin{cases} -u''(x_i) &= f(x_i) \qquad x_i = 1, \ldots, n-1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{cases} \tag{2}$$
   peut être approché par le système linéaire :
   $$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad u_0 = 0,\ u_n = 0$$
   avec $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})^\top$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})^T$, et A une matrice que l'on précisera.
4. On considère de nouveau $f = 1$, et on prend $n = 4$. En utilisant Exercice 2, résoudre le système linéaire :
   $$\begin{cases} 2\,u_1 - u_2 &= \frac{1}{16} \\ -u_1 + 2\,u_2 - u_3 &= \frac{1}{16} \\ \quad - u_2 + 2\,u_3 &= \frac{1}{16} \end{cases}$$
   Comparer les valeurs u_i obtenues avec les valeurs de la solution exacte trouvée à la question 1, $u(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, 3$. Commentaires ?

3 Extrait de l'examen de 2012

3.1 Représentation des nombres (4 points)

Lors d'un calcul, un ordinateur fournit des réponses approximatives pour des raisons de cardinalité. En effet, il utilise un nombre fini de bits (chiffre binaire c'est à dire 0 ou 1) pour représenter les entiers ou les réels. Pour comprendre comment l'ordinateur effectue ses calculs et éviter les situations pathogènes, il est intéressant de comprendre le calcul en système binaire et la représentation des réels en nombres à virgule flottante.

Question 1. *"There are only 10 types of people in the world : those who understand binary and those who don't." Expliquer la blague.*

Question 2. *Convertir les nombres 12 et 13 en binaire. Effectuer l'addition 12+13 en binaire.*

Question 3. *Comment sont représentés les réels sur un ordinateur ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'une telle représentation ? (4 lignes maximum)*

Question 4. *Expliquer les résultats de la session Scilab présentée ci-dessous :*

commande :	résultat :
`≫ a=1`	`a = 1.`
`≫ b=10^20`	`b = 1.000D+20`
`≫ c=-b`	`c = -1.000D+20`
`≫ (a+b)+c`	`ans = 0.`
`≫ a+(b+c)`	`ans = 1.`

3.2 Intégration (3 points)

Soit g une fonction de [0,1] dans $\mathbb{R}$, en général les méthodes analytiques d'évaluation de $I = \int_0^1 g(x)dx$ se basent sur le calcul d'une primitive de g. Cependant, pour la plupart des fonctions, on ne connaît pas d'expression analytique des primitives. Il est alors intéressant d'utiliser une méthode numérique. On considère la méthode de quadrature de la forme :

$$\int_0^1 g(x)dx \approx g(0) \tag{3}$$

Question 5. *Donner l'interprétation géométrique d'une telle méthode.*

Question 6. *Quelle est le degré de précision de ce schéma ?*

Question 7. *Cette méthode parait-elle intéressante ? Justifier.*

3.3 Méthode itérative du point fixe (3 points)

En analyse numérique, une méthode itérative est un procédé algorithmique. Pour résoudre un problème donné, après le choix d'une valeur initiale considérée comme une première ébauche de solution, la méthode procède par itérations au cours desquelles elle détermine une succession de solutions approximatives raffinées qui se rapprochent graduellement de la solution cherchée.

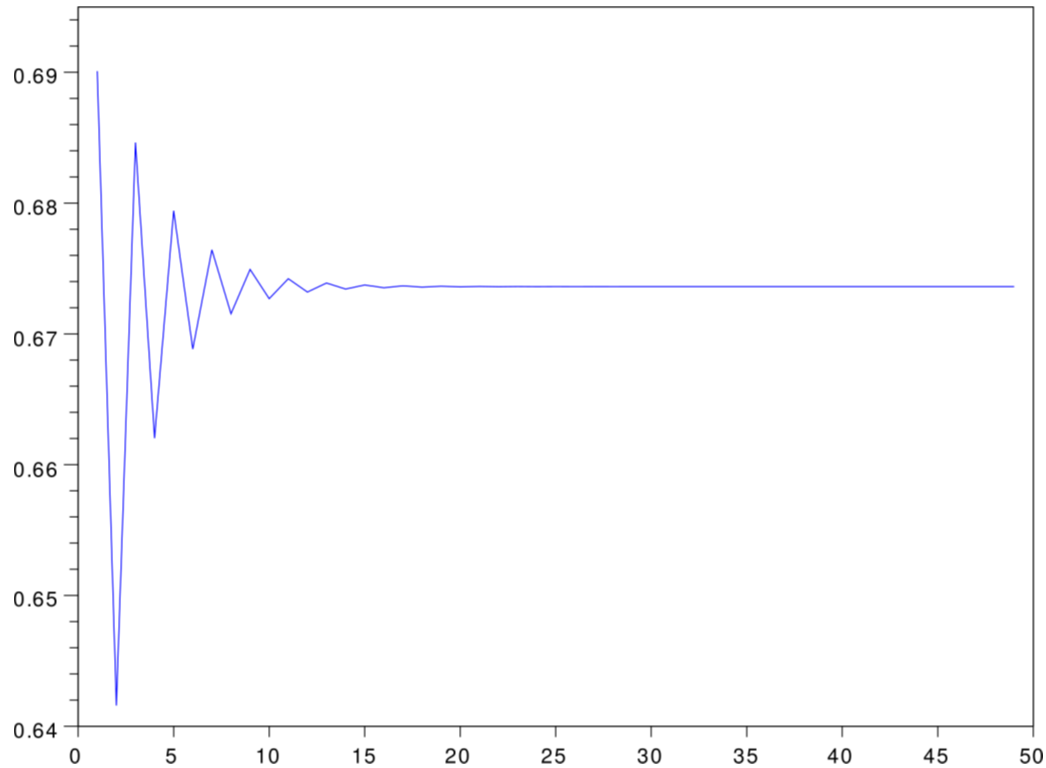
Par exemple, on cherche à résoudre numériquement l'équation $\cos(x^*) = x^*$ sur [0,1].

Question 8. *Montrer en utilisant le théorème du point fixe que l'itération $x_n = \cos(x_{n-1})$ avec $x_0 \in [0, 1]$ converge vers la solution unique d'une telle équation. On rappelle que $\forall x \in [0, 1], \sin(x) \leq \sin(1) < 1$.*

Question 9. *Compléter l'algorithme qui permet de calculer x_n :*

```
function [ res ] = pointfixe(x0,n)
res = x0;
.........
.........
.........
endfunction
```

Question 10. *On note $e_n = |x_n - x^*|$ l'erreur de la méthode après n itérations. La figure présente l'évolution de e_{n+1}/e_n en fonction de n. Pourquoi est-ce un graphique intéressant ? Pouvait-t-on prédire ce comportement ?*



Vitesse de convergence de la méthode du point fixe appliquée à la fonction $cos(x)$.